

Höhere Mathematik I: Paläoklimatologie und energiebasierte Modellierung

Jochen Merker

HTWK Leipzig

27.11.2019

Einleitung

- Eine zuverlässige Vorhersage der zeitlichen Entwicklung des Klimas auf der Erde unter Annahmen z.B. an die Freisetzung von CO_2 durch die Menschheit im Rahmen des unkontrollierten Experiments, das wir Industrialisierung nennen, ist für die Wissenschaft eine große Herausforderung.
- Da im Bereich der Klimaforschung kontrollierte physikalische Experimente unmöglich sind, kann die Wissenschaft das Klima auf der Erde nur mathematisch modellieren, am Computer simulieren und die sich aus Messungen und Simulationen ergebenden Daten analysieren.

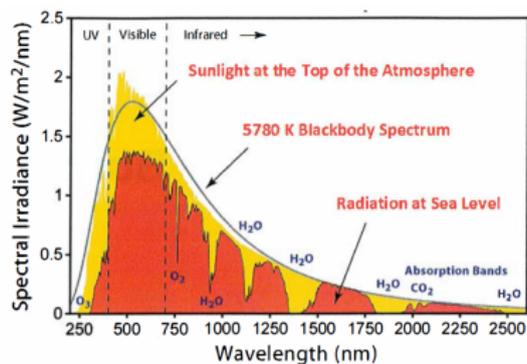
Energiebasierte Modellierung

Heutiges Programm

Wir wollen heute ein simples konzeptionelles mathematisches Modell für die Entwicklung der Temperatur in Abhängigkeit von der Einstrahlung bzw. Abstrahlung von Energie auf die bzw. von der Erde kennenlernen.

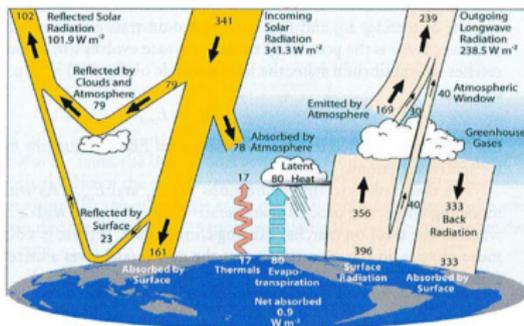
Energiebasierte Modellierung

Die Erde erhält nahezu ihre gesamte Wärmeenergie von der Strahlung der Sonne. Man kann die Strahlung der Sonne beim Eintritt in die Atmosphäre als Strahlung eines schwarzer Körper mit Temperatur 5780 K ansehen.



Energiebilanz der Strahlung

Die Details der Strahlungs-Energiebilanz der Atmosphäre sind kompliziert.



Schematische Darstellung der Strahlungs-Energiebilanz in der Atmosphäre

©Hans Kaper, Hans Engler, *Mathematics & Climate*, SIAM, 2013

Energiebilanz der Strahlung

Trotzdem erlaubt die simple Einsicht, dass die globale Durchschnittstemperatur an der Erdoberfläche ansteigt, wenn die auf der Erde eintreffende Energiemenge E_{in} pro m^2 die von der Erde emittierte Energiemenge E_{out} pro m^2 überschreitet, und bei Unterschreiten abnimmt, ein konzeptuelles mathematisches Modell.

Bezeichnet ΔT die Änderung der Temperatur $T(t)$ in der Zeitspanne h , d.h. $T(t+h) = T(t) + \Delta T$, A den Flächeninhalt der Erdoberfläche und C die durchschnittliche Wärmekapazität der Erdoberfläche, dann gilt $AC\Delta T = A(E_{in} - E_{out})h$ und für $h \rightarrow 0$ erhält man eine Differentialgleichung.

Differentiation

Definition

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) heißt im Punkt $a \in D$ **differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a, x \in D \setminus \{a\}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert, und in diesem Fall bezeichnet man $f'(a)$ als die **Ableitung** von f im Punkt a .

Bemerkung

Man kann die Ableitung äquivalenterweise auch durch

$f'(a) = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ definieren, wobei man $a + h \in D$ bei der Limesbildung verlangen muss.

Differentiation

Beispiele

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = cx \Rightarrow f'(x) = c$
- $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$
- $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ für $x \neq 0$
- $f(x) = \exp(x) \Rightarrow f'(x) = \exp(x)$
- $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$
- $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$
- $f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

Differentiation

Satz

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$ ein Häufungspunkt von $D \setminus \{a\}$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt a differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für die durch

$$f(x) = f(a) + c(x - a) + \phi(x)$$

definierte Funktion ϕ auf D die Beziehung $\lim_{x \rightarrow a, x \in D \setminus \{a\}} \frac{\phi(x)}{x-a} = 0$ gilt, und dann ist $c = f'(a)$.

Korollar

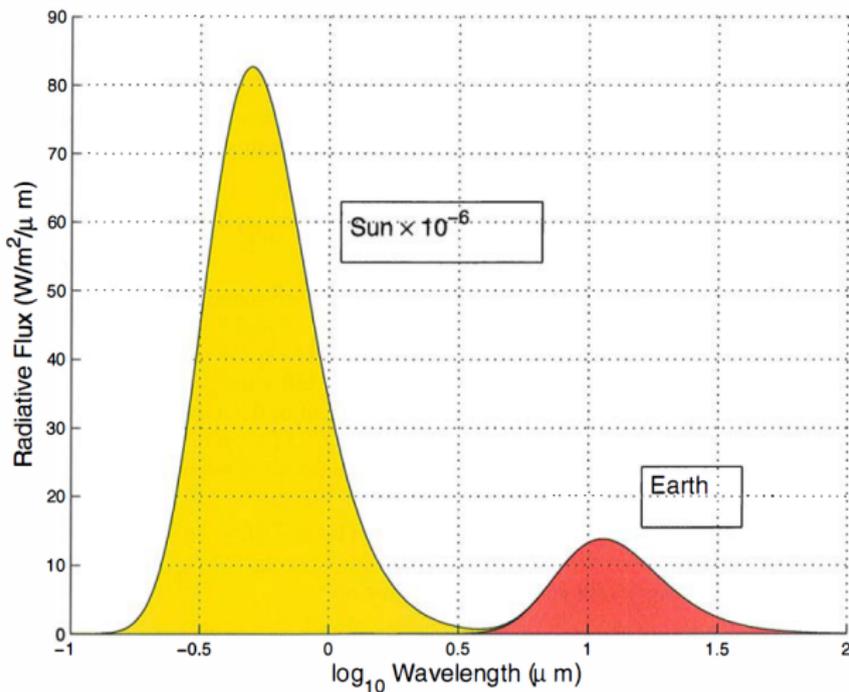
Ist f in a differenzierbar, so ist f auch stetig in a .

Energiebilanz-Modelle (EBM)

- Aus $C \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = E_{in} - E_{out}$ erhält man bei $h \rightarrow 0$ die Differentialgleichung $CT'(t) = E_{in} - E_{out}$ als EBM.
- Es gilt $E_{in} = (1 - \alpha)S_0/4$ mit der solaren Konstanten $S_0 = 1.368 W/m^2$, die den Energiefluss der Sonnenstrahlung pro m^2 in einer imaginären Sphäre vom Radius Erde-Sonne angibt, und der Albedo $\alpha \in [0, 1]$, als Anteil der zurück ins Weltall reflektierten Strahlung.
- Nimmt man an, dass die Erde wie ein schwarzer Körper mit Oberflächentemperatur T strahlt, so gilt nach dem Stefan-Boltzmann Gesetz $E_{out} = \sigma T^4$ mit Stefan's Konstante $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W/(mK^2)^2$.

Einfluß von Treibhausgasen

- Das EBM $CT'(t) = (1 - \alpha)S_0/4 - \sigma T^4$ hat im Fall konstanter Albedo $\alpha \approx 0.3$ die Ruhelage $T = \left(\frac{(1-\alpha)S_0}{4\sigma}\right)^{1/4} \approx 254.8K$
- Aufgrund Ihrer chemischen Eigenschaften erhöhen Treibhausgase die Undurchsichtigkeit der Atmosphäre im Infrarotbereich, in dem nahezu nur Abstrahlung von der Erde stattfindet, so dass sich E_{out} um einen Faktor $\epsilon < 1$ verringert.

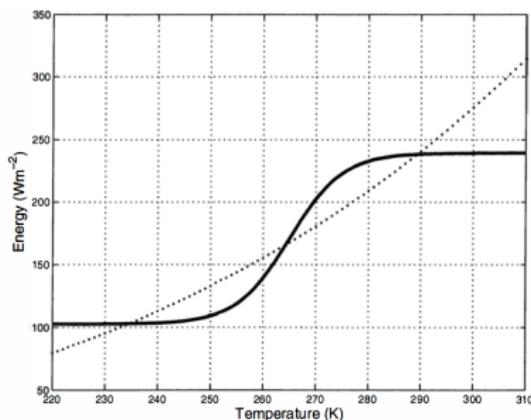


©Hans Kaper, Hans Engler, *Mathematics & Climate*, SIAM, 2013

Schnee und Eis erhöhen die Albedo

- Die aktuelle Durchschnittstemperatur $T = 287.7 \text{ K}$ auf der Erde als Ruhelage erhält man aus dem EBM $CT'(t) = (1 - \alpha)S_0/4 - \epsilon\sigma T^4$ mit konstanter Albedo $\alpha \approx 0.3$ bei $\epsilon \approx 0.62$.
- Die Annahme, dass die Albedo unabhängig von der Temperatur ist, ignoriert die Tatsache, dass bei niedrigen Temperaturen Wasser zu Schnee und Eis wird und dadurch die Albedo wesentlich höher wird.

Ein geeigneteres Modell ist $\alpha(T) = 0.5 - 0.2 \cdot S\left(\frac{T-265}{10}\right)$ mit einer S-förmigen Funktion wie $S(x) = \arctan(x)$ oder $S(x) = \tanh(x)$.



© Hans Kaper, Hans Engler, *Mathematics & Climate*, SIAM, 2013

Schneeball-Erde

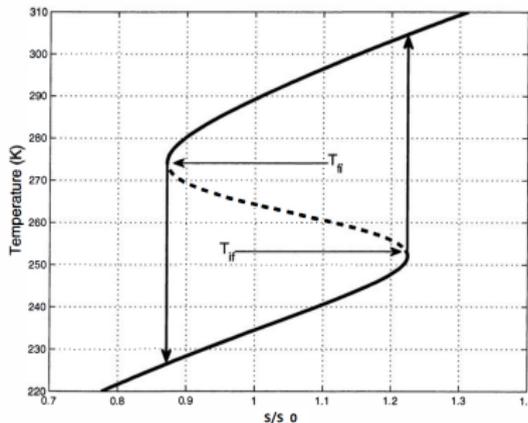
- Das EBM $CT'(t) = (1 - \alpha(T))S_0/4 - \epsilon\sigma T^4$ mit $\epsilon \approx 0.62$ und $S(x) = \tanh(x)$ hat drei Ruhelagen $T_1 \approx 288 K$, $T_2 \approx 265 K$ und $T_3 \approx 233 K$.
- T_1 und T_3 sind stabil, T_2 ist instabil.
- T_3 korrespondiert zu einer Schneeball-Erde, und es gibt starke geologische Indizien dafür, dass die Erde vor 750 bis 580 Millionen Jahren bis zu vier Mal zu einem Schneeball gefroren ist.

Bifurkation von der Schneeball-Erde zur heutigen Erde

- Da Gestein durch chemische Erosion sehr viel CO_2 aus der Atmosphäre aufnehmen kann, aber auf einer Schneeball-Erde alles Gestein von dickem Eis bedeckt ist, steigt die CO_2 -Konzentration stark an.
- Es kommt zu einem starken Treibhauseffekt, ϵ sinkt ab und es bleibt nur eine heiße Erde als Equilibrium.

Bifurkation von der heutigen Erde zur Schneeball-Erde

Bei einem Absinken bzw. Ansteigen der solaren Konstante kann es zu Hysterisis und damit zu einem Pendeln zwischen heißer Erde und Schneeball-Erde kommen, was das Auftreten mehrerer Schneeball-Phasen erklären könnte.

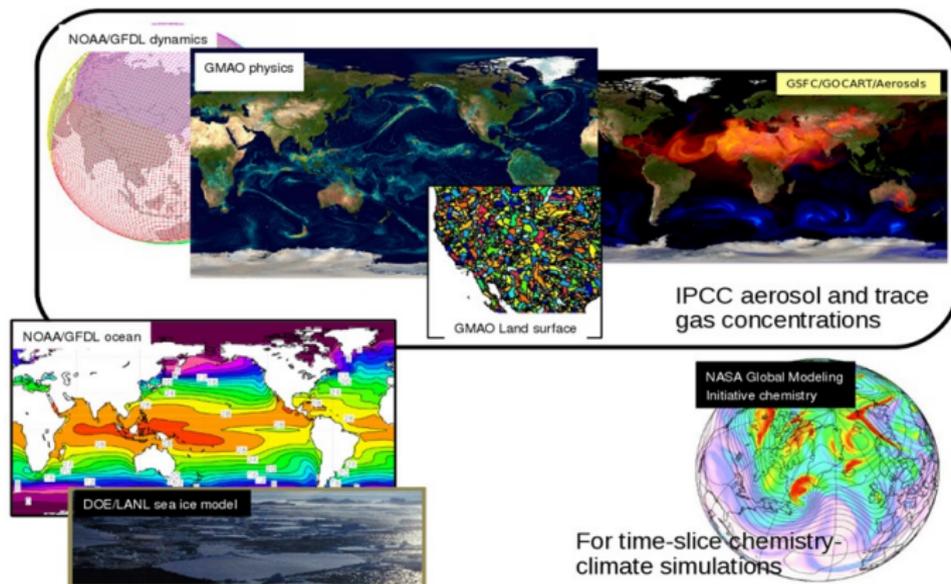


©Hans Kaper, Hans Engler, *Mathematics & Climate*, SIAM, 2013

Zusammenfassung

Wir haben ein Energiebilanz-Modell kennengelernt, dass z.B. das Phänomen der Schneeball-Erde in der Paläoklimatologie erklären kann. Für zuverlässige Vorhersagen des Klimas muss man allerdings komplexere Modelle nutzen.

GEOS-5 Model



GEOS-5 Atmosphere-Ocean General Circulation Model (AOGCM),
ist in den IPCC AR5 (Fifth Assessment Report) eingeflossen

Y. Vihlhaev et al., *The GEOS-5 AOGCM*, Climate Test Bed Joint Seminar Series IGES/COLA, 2010

Hoffnungsfroher Ausblick

Die Menschheit hat in den letzten Jahrzehnten schon einige Bedrohungen überwunden.

- Das Waldsterben wurde durch das Genfer Luftreinhalteabkommen zwischen EU, USA, Kanada und Sowjetunion aufgehalten, durch das Rauchgase entschwefelt, der Katalysator Standard und der Schwefeldioxidausstoß beschränkt wurde.
- Das Ozonloch wurde durch das Montreal Protokoll von 1987 erfolgreich bekämpft, in dem die Industriestaaten verpflichtet wurden, ozonabbauende und extrem langlebigen FCKW-Gase durch Alternativen zu ersetzen.

Man kann also die Hoffnung haben, das durch das Pariser Klimaabkommen ähnliches erreicht werden kann.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!